多次元ヴェイグ集合に対する一般化ファジィ順序 (不確実性と意思決定の数理)

桑野, 裕昭

数理解析研究所講究録
第 1636 巻 2009 年 119-125

多次元ヴェイグ集合に対する一般化ファジィ順序

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

数理計画問題の拡張として，その係数に不確実性 (ランダムネス) や不確定性 (ファジネス) を導入することや，複数の目的関数を導入する定式化が知られている．それらは確率計画問題，ファジィ数理計画問題，また，多目的計画問題と呼ばれている．確率計画問題は，不確実な状況下での意思決定を考える場合に有用なモデルを提供し，ファジィ数理計画問題は不確実性ではない曖昧さ，つまり，確率分布によって支配される曖昧さとは異なる，人間の本来持つ判断に関する曖昧さや確率分布によって表現するには情報が欠如していることに起因する曖昧さであってファジィ集合あるいは可能性分布によって表現されることが妥当であると考えうる状況下での意思決定を考える場合に利用されている．一方，多目的計画問題は最適化基準となる評価尺度が複数となる場合に用いられるモデルである．

前者の確率計画問題やファジィ数理計画問題の場合，不確実性及び不確定性に起因する問題として順序構造が一意的に定めることができないと問題を持つ．つまり，計画問題として定式化された数理モデルにおいて制約式 (の左辺の関数) や目的関数の値域空間における順序構造を，一般には，一意的に定めることができない．それ故，半順序，偽順序等の性質を持つさまざまな順序概念を用いることで，不確実性や不確定性，つまり，確率概念やファジィ概念を含むオリジナルの問題を，不確実性や不確定性を含まない数理計画問題としての同値な問題や代替問題に帰着させることにより解あるいは代替的な解を得る手法が提案されている．

後者の多目的計画問題の場合は，非劣解やパレート解と呼ばれる，複数ある目的関数のうちどれかを改善しようとすれば他の目的関数を改悪せざるを得ない解を求めることが重要であるが，この場合にも順序が大きな問題となる．つまり，前者のように不確実性や不確定性を含まないが，目的関数が複数あることからその値域空間，例えば，n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において順序構造を考えねばならない問題を持つ．一方，その問題を避けるために複数存在する目的関数を重み付けした後，線形結合した目的関数を改めて単一の目

的関数としてもつ代替問題を解くスカラー化手法も知られているが，重みの与え方に関して議論の余地が残る点に注意が必要である．

上記の数理計画問題はいずれも現実社会においては，そのモデル化の柔軟性から多様な対象に対して適用可能と思われるが，実際にはその順序構造が実際の問題への適用の大きな障害となっていると考えられる．

そこで，本論文においてはファジネスを拡張したヴェイグネスをそのモデルに含む多目的計画問題を想定し，その順序構造について議論し，従来の研究の拡張となる適切な順序構造の定義と結果について述べる．

2　ヴェイグネス

ヴェイグネスを表す数学的な対象であるヴェイグ集合及びヴェイグ数，ヴェイグベクトルについて簡単に確認する．

2.1　ヴェイグ集合

ヴェイグ集合はファジィ集合 [3] の拡張として，1993 年に W.-L. Gau と D.J. Buehrer によって提案された．

定義 2.1 (ヴェイグ集合 [1]). 対象全体からなる集合を X によって表し，その一般元を x によって表現する．

このとき，集合 X 上のヴェイグ集合 $\widetilde{V}$ は以下の 2 つのメンバーシップ関数によって特徴づけられる．

(i) **真値メンバーシップ (*truth-membership*) 関数** $t_{\widetilde{V}}$: $t_{\widetilde{V}}(x)$ は x が $\widetilde{V}$ に帰属するグレードの最小値を表す．

(ii) **偽値メンバーシップ (*false-membership*) 関数** $f_{\widetilde{V}}$: $f_{\widetilde{V}}(x)$ は x が $\widetilde{V}$ に帰属しないグレードの最小値を表す．

また，すべての $x \in X$ に対して $t_{\widetilde{V}}(x) + f_{\widetilde{V}}(x) \leqslant 1$ が成り立つものとする．

以下の 2 点には注意すべきである．

注意 2.1. 上記の定義でも明らかなように，各 $x \in X$ に対して $f_{\widetilde{V}}(x) = 1 - t_{\widetilde{V}}(x)$ が成立しているとき，ヴェイグ集合の概念はファジィ集合のそれと一致する．この意味において，ヴェイグ集合はファジィ集合の拡張であると言える．

更に，メンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{U}} = t_{\widetilde{V}}$ によって特徴づけられるファジィ集合を $\widetilde{U}$，メンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{W}} = f_{\widetilde{V}}$ によって特徴づけられるファジィ集合を $\widetilde{W}$ とするとき，ヴェイ

グ集合の定義より

$$\mu_{\widetilde{W}}(x) = f_{\widetilde{V}}(x) \leqslant 1 - t_{\widetilde{V}}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{U}}(x) = \mu_{\neg\widetilde{U}}(x)$$

が導かれ，$\widetilde{W} \subseteq \neg\widetilde{U}$ が示される．ここで，$\neg\widetilde{U}$ はファジィ集合 $\widetilde{U}$ の否定（“$\widetilde{U}$ ではない”）である．このことは，$f_{\widetilde{V}}$ によって特徴づけられるファジィ集合は $t_{\widetilde{V}}$ によって特徴づけられるファジィ集合の否定よりもメンバーシップ値が低く，否定の程度が緩められていることを示す．

注意 2.2. 真値メンバーシップ関数 $t_{\widetilde{V}}$，偽値メンバーシップ関数 $f_{\widetilde{V}}$ によって特徴づけられるヴェイグ集合を $\widetilde{V}$ と表す．

このとき，$x \in X$ に対して，区間 $[t_{\widetilde{V}}(x), f_{\widetilde{V}}(x)] = \{r \in [0,1] \,|t_{\widetilde{V}}(x) \leqslant r \leqslant f_{\widetilde{V}}(x)|\} \subseteq [0,1]$ を対応づける．これを $\mu_{\widetilde{U}}(x) = [t_{\widetilde{V}}(x), f_{\widetilde{V}}(x)]$ によって表し，この区間値メンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{U}}$ によって特徴づけられる区間ファジィ集合 $\widetilde{U}$ を考えると，ヴェイグ集合 $\widetilde{V}$ と区間ファジィ集合 $\widetilde{U}$ は 1 対 1 対応となる．

2.2 ヴェイグ数

ファジィ集合の特殊な場合としてファジィ数のと同様に，ヴェイグ集合の特殊は場合としてヴェイグ数を以下のように与える．

定義 2.2 (ヴェイグ数 [4]). $\widetilde{a}$ を実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上のヴェイグ集合とし，それを特徴づける真値メンバーシップ関数，偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\widetilde{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f_{\widetilde{a}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ とする．このとき，ヴェイグ集合 $\widetilde{a}$ がヴェイグ数であるとは，以下の条件を満足するときである．

(i) $t_{\widetilde{a}}$ は準凹関数，かつ，$f_{\widetilde{a}}$ は準凸関数である．
(ii) $t_{\widetilde{a}}$ は上半連続関数，かつ，$f_{\widetilde{a}}$ は下半連続関数である．
(iii) $t_{\widetilde{a}}(x^1) = 1, f_{\widetilde{a}}(x^1) = 0$ を同時に満たす実数 x^1 が唯一つ存在する．
(iv) $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | t_{\widetilde{a}}(x) > 0\}$ 及び $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | f_{\widetilde{a}}(x) < 1\}$ は有界集合である．ここで，$\mathrm{cl}(A)$ は集合 A の閉包を表す．

また，凸ファジィ集合に対応する凸ヴェイグベクトルを以下のように定める．

定義 2.3 (凸ヴェイグ集合). 集合 X 上のヴェイグ集合 $\widetilde{v}$ の真値メンバーシップ関数，偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\widetilde{v}}, f_{\widetilde{v}}$ とする．このとき，$t_{\widetilde{v}}, 1 - f_{\widetilde{v}}$ が準凹関数であれば，$\widetilde{v}$ を凸ヴェイグ集合とよぶ．

つまり，ヴェイグ数は凸ヴェイグ集合の特殊な場合であり，凸ヴェイグ集合はヴェイグ集合の特殊な場合である．

2.3 ヴェイグベクトル

最後にヴェイグベクトルの定義を示す．ここでは便宜上，“ベクトル” と表現しているが，以下で定義されるヴェイグベクトル全体からなる集合がベクトル空間をなしているわけではないことを指摘しておく．

定義 2.4. $\mathbb{R}^n$ 上のヴェイグ集合 $\tilde{a}$ を特徴づける真値メンバーシップ関数，及び，偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\tilde{a}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $f_{\tilde{a}} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ とする．

このとき，ヴェイグ集合 $\tilde{a}$ がヴェイグベクトルであるとは，以下の条件を満足するときである．

(i) $t_{\tilde{a}}$ は準凹関数，かつ，$f_{\tilde{a}}$ は準凸関数である．
(ii) $t_{\tilde{a}}$ は上半連続関数，かつ，$f_{\tilde{a}}$ は下半連続関数である．
(iii) $t_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}^1) = 1, f_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}^1) = 0$ を同時に満たすベクトル $\boldsymbol{x}^1 \in \mathbb{R}^n$ が唯一つ存在する．
(iv) $\mathrm{cl}\,\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | t_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}) > 0\}$ 及び $\mathrm{cl}\,\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | f_{\tilde{a}}(\boldsymbol{x}) < 1\}$ は有界集合である．

3 Yoshida-Kerre のアプローチ

この節では，Yoshida-Kerre[2] のアプローチについて概観する．

彼らは n 次元ユークリッド空間上で定義されたファジィ集合に対して，順序錐による順序付けを試みるが，その順序錐は通常の順序錐ではなくそれをファジィ化したファジィ集合としての順序錐であった．

まずは，そのファジィ化された順序錐について振り返っておく．

定義 3.1 (ファジィ化された順序錐 [2]). $\{K_\alpha; \alpha \in [0,1]\}$ を非空，アキュートな閉凸錐の族で，以下の条件を満たすものとする．

$$K_\alpha = \bigcap_{\alpha' \in (0,\alpha)} K_{\alpha'}, \qquad \alpha \in (0,1] \text{ のとき，}$$
$$K_0 = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{\alpha \in (0,1]} K_\alpha \right)$$

このとき，ファジィ化された順序錐 $\tilde{K}$ を特徴づけるメンバーシップ関数は以下のように定義される．

$$\mu_{\tilde{K}}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \alpha \cdot I_{K_\alpha}(\boldsymbol{x}),$$

但し，I_S は集合 S の定義関数を表す．

ファジネスを含まない順序錐 K を n 次元ユークリッド空間上で考える場合，2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に関する順序 $\leq_K$ は「$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in K$ が成り立つならば $\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}$」として定義される．このとき，関係 R を $R = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,|\boldsymbol{x} \leq_K \boldsymbol{y}\}$ によって定義すれば，$\leq_K$ と R は同一視できる．

この考え方をファジィ化された順序錐についても応用する．

定義 3.2. n 次元ユークリッド空間上でファジィ関係 $\tilde{R}$ を次のように定義する．

$$\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup \{\alpha \in [0,1] \,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \in K_\alpha\},$$

但し，$\sup \varnothing = 0$ とする．

つまり，このファジィ化された順序錐 $\tilde{K}$ とファジィ関係 $\tilde{R}$ は次の関係をもつ．

$$\mu_{\tilde{K}}(\boldsymbol{x}) = \mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}), \qquad \mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mu_{\tilde{K}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

更に，Yoshida らは次の性質を導いている．

定理 3.1 ([2])**.** $\tilde{R}$ はファジィ半順序である．即ち，以下の条件を満たす．

(i) すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$ が成り立つ．

(ii) すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geqslant \min\{\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\}$ が成り立つ．

(iii) $\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$ かつ $\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) > 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である．

sup-min 結合を用いて次の関係を定義する．以下で，$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ で定義されたファジィベクトル全体を指す．

定義 3.3 ([2])**.** ファジィベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して，順序 $\tilde{\boldsymbol{a}} \leq_{\tilde{R}} \tilde{\boldsymbol{b}}$ を以下によって定義する．

$$\tilde{\boldsymbol{a}} \subseteq \tilde{R} \circ \tilde{\boldsymbol{b}} \quad \text{かつ} \quad \tilde{\boldsymbol{b}} \subseteq \tilde{\boldsymbol{a}} \circ \tilde{R},$$

但し，すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{\boldsymbol{b}}}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n} \min\{\mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \mu_{\tilde{\boldsymbol{b}}}(\boldsymbol{y})\}, \qquad \mu_{\tilde{\boldsymbol{a}} \circ \tilde{R}}(\boldsymbol{y}) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \min\{\mu_{\tilde{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{y}), \mu_{\tilde{R}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\},$$

である．

上のように定義された $\leq_{\tilde{R}}$ は次の性質をもつ．

定理 3.2 ([2])**.** 順序 $\leq_{\tilde{R}}$ は擬順序である．すなわち，$\tilde{\boldsymbol{a}}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して，以下が成立する．

(i) $\tilde{\boldsymbol{a}} \leq_{\tilde{R}} \tilde{\boldsymbol{a}}$

(ii) $\tilde{\boldsymbol{a}} \leq_{\tilde{R}} \tilde{\boldsymbol{b}}$ かつ $\tilde{\boldsymbol{b}} \leq_{\tilde{R}} \tilde{\boldsymbol{c}}$ ならば $\tilde{\boldsymbol{a}} \leq_{\tilde{R}} \tilde{\boldsymbol{c}}$ が成り立つ．

4 Yoshida-Kerre のファジィ順序の拡張

前節で概観した Yoshida-Kerre のアプローチによるファジィベクトル間の擬順序を，ここでは簡単にファジィ順序と呼ぶ．

ここでは，このファジィ順序を拡張し，ヴェイグベクトルに対する順序構造を考えることとする．

以下では，$\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上のヴェイグベクトル全体からなる集合を表し，特に混乱がない限り，真値メンバーシップ関数を μ を，偽値メンバーシップ関数を ν を用いて表すこととする．また，ファジィ順序錐 $\tilde{K}$ によって定義されたファジィ関係を $\tilde{R}$ と表記する．

定義 4.1. $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ をヴェイグベクトルとする．このとき，$\tilde{a}, \tilde{b}$ の順序 $\tilde{a} \precsim_{\tilde{R}} \tilde{b}$ を次式によって定義する．

$$\tilde{a} \subseteq \tilde{R} \vartriangle \tilde{b} \quad \text{かつ} \quad \tilde{b} \subseteq \tilde{a} \triangledown \tilde{R},$$

ここで，すべての $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mu_{\tilde{R} \vartriangle \tilde{b}}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \min \left\{ \mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{b}}(y) \right\}, \quad \mu_{\tilde{a} \triangledown \tilde{R}}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \min \left\{ 1 - \nu_{\tilde{a}(y)}, \mu_{\tilde{R}}(x, y) \right\},$$

であるとする．

上記の順序を一般化ファジィ順序 (もしくは，ヴェイグ順序) と呼ぶこととすれば，ファジィ順序と同様に一般化ファジィ順序 (ヴェイグ順序) は擬順序であることが以下の結果から示めされる．

定理 4.1. 順序 $\precsim_{\tilde{R}}$ は擬順序である．すなわち，$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ に対して

(i) $\tilde{a} \precsim_{\tilde{R}} \tilde{a}$
(ii) $\tilde{a} \precsim_{\tilde{R}} \tilde{b}$ かつ $\tilde{b} \precsim_{\tilde{R}} \tilde{c}$ ならば $\tilde{a} \precsim_{\tilde{R}} \tilde{c}$

が成立する．

5 まとめ

本論文において，ヴェイグベクトルに関する擬順序を導入した．これは Yoshida-Kerre のファジィベクトルに対する擬順序の自然な拡張となっており，彼らがファジィベクトルに対して示した結果がヴェイグベクトルに対しても成り立つことが期待できる．今後は，それらの顕彰を進めたいと考えている．

参考文献

[1] W.-L. Gau and D.J. Buehrer, *Vague sets*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **23** (1993), no. 2, 610–614.

[2] Y. Yoshida and E.E. Kerre, *A fuzzy ordering on multi-dimensional fuzzy sets induced from convex cones*, Fuzzy Sets and Systems **130** (2002), 343–355.

[3] L.A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), 338–353.

[4] 桑野 裕昭, **ヴェイグ線形計画問題**, 京都大学数理解析研究所講究録 **1559** (2007), 93–105.